$-80538738812075974^3 + 80435758145817515^3 + 12602123297335631^3 = 42$

Konrad Klug von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hat 2019 dargestellt, was es mit diesem Ergebnis “42” in der Zahlentheorie auf sich hat. Siehe hier. Es handelt sich um die drei Dreierpotenzen ***von ganzen Zahlen*** **ℤ**, die als Summe die Zahl 42 ergeben sollen. Also $x^3+y^3+z^3 = 42$. Mit großem Rechenaufwand etlicher Computer wurde dieses spezielle, jahrelang zähe Problem im September 2019 endlich gelöst. Heraus kam die obige Zahlenkombination.

Es soll nun ein einfaches Problem geklärt werden, nämlich ob es drei Dreierpotenzen von ***natürlichen Zahlen*** **ℕ** gibt, die addiert zusammen 42 ergeben. Die “natürlichen Zahlen” bestehen aus den Zahlen des *natürlichen* an den 5 Fingern Abzählens: 1, 2, 3, 4, 5, usw. Während die obigen “ganzen Zahlen” ℤ ebenfalls aus diesen natürlichen Zahlen bestehen, jedoch ***können sie auch negativ sein*** (wie man an dem Ergebnis sieht) und sie enthalten die Null.

Es geht mir in der Mathematik - seit ich das Projekt ‘Argumentation’ behandele ***- vor allem um das Aufzeigen von Beispielen für Beweise,*** da ich das Studium von mathematischer Beweisführung für sinnvoll halte, wenn man haltbar argumentieren will. Deshalb habe ich auch keine Scheu vor solch einfachen, sog. ‘trivialen’ Beweisen, da auch sie gewisse Prinzipien von Beweisführung verdeutlichen. Im Folgenden habe ich nun 3 wichtige Prinzipien benannt.

1. Prinzip: Suche nach einer (möglichst durchsichtigen) Systematik

Ich gehe also die Zahlenreihe durch und liste *systematisch* ***alle*** Dreierkombinationen ***ungleicher*** natürlicher Zahlen als blaue Zellen in einer Tabelle auf. (Die roten sind – aufgrund der Kommutativität - schon in der Spalte vorher vergeben; bei den schwarzen Durchgestrichenen gibt es ***gleiche*** Zahlen *innerhalb* einer Tabellenzelle).

~~121~~	~~231~~	341	usw.
~~122~~	~~232~~	~~342~~	usw.
123	~~233~~	~~343~~	usw.
124	234	~~344~~	usw.
125	235	345	usw.
126	236	346	usw.
127	237	347	usw.
usw.	usw.	usw.	

Solch eine Tabelle versucht also die Systematik möglichst durchsichtig zu machen, d.h. es ist eine Form, von der anzunehmen ist, dass es keine Lücken in der Aufzählung der möglichen Kombinationen gibt; dass durch diese Form also ***prinzipiell alle*** gesuchten Kombinationen erfassbar sind.

Da in 124 und in 234 schon allein die 4 eine Zahl ergibt, die größer als 42 ist ($4^3=64$)**,** kommen diese Kombinationen nicht mehr in Frage. Und ebenfalls nicht die weiteren Kombinationen 125, 235, 341 usw., die die Zahl 4 enthalten erst recht nicht solche mit Zahlen >4. denn diese ergeben ja *noch* höhere Werte. Doch wie steht's mit 123 als einzige Kombination, die noch übrig bleibt? (Das Wort ‚Kombination' wird hier von mir nicht als Spezialausdruck der ‚Kombinatorik' verwendet, sondern im umgangssprachlichen Sinne).

$$(1^3+2^3+3^3) = 36$$

36 ist jedoch kleiner als 42 und nicht ***gleich*** 42. Also ist diese Kombination auch ausgeschieden.

2. Prinzip: Suche nach einer *vollständigen* Fallunterscheidung

Bisher sind alle Kombinationen mit ***ungleichen*** Zahlen ausgeschieden. Als nächsten Fall betrachte ich ***Kombinationen, wo auch gleiche Zahlen vorkommen***. Mit diesen beiden Fällen habe ich alle Möglichkeiten von infrage kommenden Kombinationen erschöpft. Denn es gibt nur entweder Kombinationen wo alle Glieder ungleich sind, oder Kombinationen, bei denen es auch gleiche Glieder gibt. Es handelt sich also um eine *vollständige* Fallunterscheidung, weil es sonst keine Fälle mehr gibt. [1)]

Bei 3 unterschiedlichen Elementen gibt es nur entweder **3** gleiche oder **2** gleiche Elemente in einer Dreier-Kombination. Dies ist in der nächsten Tabelle aufgeführt:

111	112	113	114	115	usw.
221	222	223	224	225	usw.
331	332	333	334	335	usw.
441	442	443	444	445	usw.
551	552	553	554	555	usw.
usw.	usw.	usw.	usw.	usw.	

Da 4^3 erwiesenermaßen größer als 42 ist ($4^3=64$), habe ich bei meiner Systematik immer dann gestoppt, wenn eine 4 in einer Tabellenzelle auftauchte. Bei der nächsten Kombination ergibt sich ja ***immer*** eine noch größere Zahl. Unter dieser Voraussetzung kommen überhaupt nur noch insgesamt 9 Kombinationen in Frage:

111	112	113
221	222	223
331	332	333

Diese 9 Kombinationen werden in der obigen Tabelle von lauter Zellen, die Vierer enthalten ‚umzingelt'. Und alle jeweils nächsten Zellen enthalten die 5, sind also ***noch mehr*** außerhalb der Toleranzgrenze.

3. Prinzip: Zwischenergebnis herstellen, um die weitere Vorgehensweise einsichtiger zu machen

Wie gehe ich jetzt *mit diesen 9 Kombinationen* um? Am Besten, ich stelle erst einmal klar, was die einzelnen Kubikzahlen bedeuten: $1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$

Das ist schon mal ein sinnvolles kleines ‚Zwischenergebnis', das die weitere Vorgehensweise übersichtlicher bzw. einsichtiger macht. Damit gehe ich nun jede einzelne der 9 Kombinationen durch:

1	111 ergibt 3x1	ausgeschieden, da <42
2	112 ergibt 2x1+8=10	ausgeschieden, da <42
3	113 ergibt 2x1+27=29	ausgeschieden, da <42
4	221 ergibt 2x8+1=17	ausgeschieden, da <42
5	222 ergibt 3x8=24	ausgeschieden, da <42
6	223 ergibt 2x8+27=43	ausgeschieden, da >42
7	331 ergibt 27x27+1	ausgeschieden, da >42
8	332 ergibt 27x27+8	ausgeschieden, da >42
9	333 ergibt 3x27=81	ausgeschieden, da >42

Bei allen 9 der übriggebliebenen Kombinationen hat sich also ebenfalls gezeigt, dass keine die Zahl 42 ergibt. Folglich hat ***keine*** Kombination die Zahl 42 ergeben. Folglich gibt es ***keine*** Kombination natürlicher Zahlen von der Form $x^3+y^3+z^3$, die die Zahl 42 als Resultat hat.

Was sich ja auch daraus schon ergibt, dass man das ursprüngliche Problem auf ganze Zahlen bezieht und nicht auf natürliche. Und da ist es, wie sich gezeigt hat, ungefähr ***unendlich+2 mal*** schwieriger, was Definitives, zumindest über die Sache mit der Zahl 42 herauszukriegen. Das liegt an der Existenz der negativen ganzen Zahlen. Und da gibt es dann offenbar tatsächlich Lösungen (bis auf Ausnahmen), wie endlich auch für die Zahl 42 offenbar wurde.

Anmerkung 1: *Unvollständige* Fallunterscheidungen sind ein grundlegendes Merkmal von Propaganda-Argumentation. Vgl. die Schlussbemerkung bei der empirischen Übung 4 „Was ist Propaganda?“