Manfred Aulbach, 08.12.2008

Überarbeitet Juli 2021

Die De Morganschen Gesetze

Das Thema hat seine Tücken, da man sich zu seinem genaueren Verständnis eine klare Vorstellung von Schnittmenge und Vereinigungsmenge verschaffen muss.

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

A und B sind Teilmengen einer Obermenge Ω (Omega). Die Obermenge enthält sowohl A als auch $\overline{A}$ (=non A), B als auch $\overline{B}$ (= non B).

Was soll man sich nun unter den De Morganschen Gesetzen vorstellen?

In der dt. Wikipedia wird glücklicherweise (ganz unten) ein Beispiel gegeben.

http://de.wikipedia.org/wiki/De_Morgansche_Gesetze

Die Obermenge Ω besteht in diesem Beispiel (das ich der Einfachheit halber leicht verändert habe) aus einer (bestimmten) Menge von Messern, die einer Qualitätsprüfung unterliegen:

A bedeutet die Menge der Messer, deren Schneide fehlerfrei ist.

B bedeutet die Menge der Messer, deren Griff fehlerfrei ist.

Ein Messer wird *nicht* angenommen, wenn es

entweder $\overline{A}$ ***oder*** $\overline{B}$ ist, ***oder*** $\overline{A}$ *und* $\overline{B}$ gleichzeitig ist. Also ***entweder*** eine fehlerhafte Schneide ***oder*** einen fehlerhaften Griff ***oder*** beides hat.

1. Anmerkung: In Mengenschreibweise ist dieses *letzte* ausschließende "Oder" („oder beides hat“) die ‚***Vereinigungsmenge***‘ $\overline{A} \cup \overline{B}$ (die Messer mit dem schlechten Griff sind ‚vereinigt‘ mit den Messern mit der schlechten Schneide). Es handelt sich hier zwar ***um eine Art Addition***, sofern alle Elemente der verschiedenen vereinigten Mengen unterschiedlich sind; d.h. die Eigenschaften müssen unterschiedlich sein. In unserem Beispiel ist die Eigenschaft „die Schneide ist fehlerfrei/mangelhaft“ ***unterschiedlich*** zur Eigenschaft „der Griff ist fehlerfrei/mangelhaft“. Insofern können diese Mengen an Messern mit jenen Eigenschaften problemlos zur Vereinigungsmenge ‚addiert‘ werden. In dem Term $A \cup B$ sind die Messer mit guter Schneide und gutem Griff zusammen ‚addiert‘, und in dem Term $\overline{A} \cup \overline{B}$ sind die Messer mit mangelhaften Schneiden und mit mangelhaften Griffen zusammen ‚addiert‘. Und in dem Term $A \cup \overline{B}$ sind Messer mit fehlerfreier Schneide mit Messern mit mangelhaftem Griff zusammen ‚addiert‘.

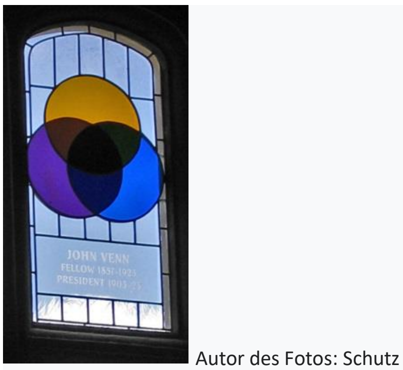
Darum gilt der **Merksatz**: Bei der **V**ereinigungsmenge (Symbol $\cup$) handelt es sich um eine ‚Addition‘ aller Elemente der verschiedenen Mengen, **sofern** die Eigenschaften der verschiedenen Elementmengen unterschiedlich sind.

2. Anmerkung: Was ist die ‚***Schnittmenge***' (Symbol $\cap$)? Ein Messer wird akzeptiert, wenn es beiden Anforderungen *A* ***und*** *B* definitiv genügt. "Mengen-Durchschnitt", oder auch "Schnittmenge", sind etwas merkwürdige Ausdrücke, insofern sie von einer zwar geläufigen, meiner Ansicht nach jedoch irreführenden, Interpretation der Venn-Diagramme stammt (vgl. dazu weiter unten meine zusätzliche Ergänzung zur 3. Anmerkung).

3. Anmerkung: Das bedeutet weiterhin: Echte Schnittmengen zweier Mengen haben (mindestens) zwei definitiv ***verschiedene Eigenschaften*** gemeinsam. Es geht also nicht darum, dass zwei verschiedene Mengen A und B ***irgend eine*** Gleichheit der Eigenschaft *gemeinsam* haben, damit sie eine Schnittmenge bilden, also z.B. Äpfel und Birnen, deren Gemeinsamkeit in der einen Eigenschaft Wurmstichigkeit (Wu) besteht. In unserem Messerbeispiel besteht *Ausschuss* bezüglich Aspekt nonA (Schneide ist fehlerhaft) und *Ausschuss* bezüglich Aspekt nonB (Griff ist fehlerhaft). Die ***Eigenschaften*** nonA und nonB dürfen nicht gleich sein. (Sie müssen *definitiv* ungleich sein; d.h. sie dürfen sich nicht überschneiden, wonach die eine Eigenschaft teilweise in der anderen enthalten ist, z.B. mindestens 3-Schartigkeit und mindestens 5 - Schartigkeit bei den obigen Messern). Wenn Äpfel und Birnen zwei Mengen sind und es würde lediglich nach ***einer*** Eigenschaft gesucht (Wu), dann könnte es – nach meiner Auffassung – keine Schnittmenge geben, da eine Schnittmenge mindestens zwei definitiv verschiedene ***Eigenschaften*** beinhalten muss. - Beim Äpfelbeispiel könnten die beiden verschiedenen Eigenschaften z.B. Wurmstichigkeit ***und*** Fleckigkeit sein. (Dieser grundlegend wichtige Sachverhalt wird - obwohl er meiner Ansicht nach keineswegs trivial ist - üblicherweise nicht geklärt.)

Zusätzliche Ergänzung: Wenn diese Ansicht der 3. Anmerkung stimmt, so ist ***die übliche*** Veranschaulichung vom ***Durchschnitt*** (bzw. ‚Schnittmenge') durch das sog. Venn-Diagramm (zwei oder mehr sich überschneidende Kreise) mindestens irreführend, wenn nicht sogar falsch. Nämlich ***insofern***, als man annimmt, die Schnittmenge seien die *gemeinsamen* Punkte der beiden Kreise (also z.B. diejenigen Punkte mit den gleichen Koordinaten). Genau dies wird m.E. fälschlicherweise auch in dem Wikipedia-Artikel über Mengendiagramm gesagt: "(Durchschnitt); *A* geschnitten mit *B*, also alle Elemente, die sowohl in *A* als auch in *B* enthalten sind.". Dieser "Durchschnitt" der beiden sich überschneidenden Kreise ist dort dementsprechend in ***einer*** (roten) Farbe gezeichnet. Es handelt sich also nicht mehr um ***zwei*** definitiv zu unterscheidende Eigenschaften von A und B sondern um ***eine*** gemeinsame Eigenschaft von A und B. Das Venn-Diagramm wird meiner Ansicht nach aber erst dann richtig und sinnvoll, wenn es sich um zwei Kreise (A und B) handelt, deren Inhalt aus Punkten mit je unterschiedlicher Farbe besteht. Also A beinhaltet beispielsweise rote Punkte und B beinhaltet beispielsweise blaue Punkte. Dann ist die Schnittmenge diejenige Menge (von Gegenständen), bei denen beide Eigenschaften, die hier mit rot und blau symbolisiert sind, gleichzeitig vorhanden sind (folglich müsste sich beim *Tintenstrahldrucker* eine lila Farbe auf dem gedruckten Papier ergeben). Oder in unserem Beispiel die zwei Eigenschaften gute Klingen und gute Griffe ***zusammen, gemeinsam, synchron, sowohl-als-auch.*** - Das Problem wird von mir an anderer Stelle genauer abgehandelt, nämlich hier.

Merksatz: Bei der **Schnittmenge** (Symbol $\cap$) sollte man an das Beispiel vom ***Tintenstrahldrucker*** denken; wonach ***sowohl*** die blaue ***als auch*** die rote Tinte gemeinsam die Lila Farbe erzeugen.



Autor des Fotos: Schutz - Lizenz: siehe Wikimedia

Stained glass window by Maria McClafferty in the dining hall of Gonville and Caius College, in Cambridge (UK), commemorating John Venn, who invented the concept of Venn diagram and was a fellow of the college. The text on the windows reads: JOHN VENN; FELLOW 1857–1923; PRESIDENT 1903–1923

Nachdem einigermaßen geklärt wurde, was „Vereinigungsmenge“ und was „Schnittmenge“ bedeutet, können wir zu unserem eigentlichen Themata übergehen, zur Frage: ***Was wollen uns die beiden De Morganschen Gleichungen sagen?***

4. Anmerkung: Durchaus allgemeingültig kann man offenbar sagen: Die de Morganschen Gesetze beinhalten durchaus ***auch*** die Unterscheidungsgabe von Gut und Schlecht (von dem einen Sachverhalt und seinem Gegenteil), die wir Tag für Tag anwenden – und dem entspricht unser Beispiel mit den Messern.

Die “voll Guten” (Positiven) sind also $A \cup B$ (mit den ‚addierten‘ guten Eigenschaften) und die “voll Schlechten” (Negativen) sind $\overline{A} \cup \overline{B}$ (mit den ‚addierten‘ (=vereinigten) schlechten Eigenschaften).

Aufgrund des ***Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten*** („tertium non datur“) der hier angewandten ‘klassischen’ Logik (entweder Ja oder Nein und nichts dazwischen) gilt: Die Guten (Positiven) können nicht die Schlechten sein und umgekehrt.

Oder anders ausgedrückt: die Nicht-Guten sind die Schlechten (Negativen) und die nicht-Schlechten sind die Guten (oder die nicht-Negativen sind die Positiven). Man kann auch sagen: Die Guten haben ***nix*** Schlechtes an sich. Sobald auch nur etwas Schlechtes vorhanden ist (entweder $\overline{A}$ oder $\overline{B}$ oder gar beides) ist alles zu spät, sind sie nicht mehr gut. D.h. die Guten sind ausschließlich nur gut, sie dürfen nix Schlechtes an sich haben. Dies ist die deutsch-perfektionistische Sichtweise.

Wenn ***die voll-Guten*** $A \cap B$ sind (also die gute Eigenschaft A mit der guten Eigenschaft B ‚geschnitten‘, d.i. sowohl-als auch), so sind ***die voll-Nicht-Guten*** das Gegenteil von ihnen, also: $\overline{A \cap B}$. Und diese wären offenbar gleich den ***voll-Schlechten*** $\overline{A} \cup \overline{B}$ (also mit den vereinigten, ‚addierten‘ schlechten Eigenschaften $\overline{A}$ und $\overline{B}$). Das aber ist das erste der beiden De Morganschen Gesetze:

$$1. \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \;.$$

Damit wäre die Plausibilität der 1. De Morganschen Regel aufgezeigt. Eine genauere Beweisführung folgt weiter unten.

Wie sieht es nun mit der 2. Regel aus?

$$2. \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$\overline{A} \cap \overline{B}$ würde bedeuten: ***sowohl*** schlechte Klingen, ***als auch*** schlechte Griffe. Die haben überhaupt nix Gutes an sich. Das Gegenteil wären solche, die wenigstens *etwas* Gutes an sich haben. Die hätten entweder A oder B oder gar beides: $\overline{A} \cap B$**,** $A \cap \overline{B}$**,** $A \cap B$.

Man kann auch sagen: es handelt sich hier um die 'türkische' Sichtweise des Guten vs. Schlechten (im Gegensatz zur deutsch-perfektionistischen): Die Schlechten haben ***absolut*** nix Gutes an sich. Sobald Irgendwas ***auch nur etwas Gutes*** an sich hat, ist es gut. Die Guten können beliebig viel Schlechtes an sich haben, Hauptsache sie sind in einem Punkt gut. Das könnte man 'türkischerweise' auf das Messer-Beispiel anwenden: Alle Messer sind gut, wenn sie wenigstens eine gute Klinge haben oder wenigstens einen guten Griff. Nur wenn sie beides nicht haben, werden sie zum Ausschuß geworfen - sind somit auch für Türken echter *Scheißendreck.*

Aufgrund des *tertium non datur* sind das Gegenteil derjenigen, die wenigsten etwas Gutes an sich haben diejenigen, die überhaupt nix Gutes an sich haben - und umgekehrt. Man sollte hier auf einen geläufigen Trugschluß der (affektiv geprägten) Alltagslogik hinweisen, wonach das Gegenteil gerne mit dem *absoluten* Gegenteil identifiziert wird. Nach dieser Alltagslogik ist das Gegenteil von Bussen, die immer unpünktlich sind, solche Busse, die ständig pünktlich sind. Während nach der rationalen Logik das Gegenteil lediglich solche Busse wären, die wenigstens manchmal - wenn auch noch so selten - pünktlich sind, die also *nicht immer* unpünktlich sind.

Die vereinigte Menge derjenigen, die ***etwas*** Gutes an sich haben (also die türkisch-Guten) sind $A \cup B$. Weiter: das ***Gegenteil*** derjenigen, die wenigstens ***etwas Gutes*** an sich haben, wäre: $\overline{A \cup B}$. Und diese sind gleichbedeutend mit den Abgrund-Schlechten: $\overline{A} \cap \overline{B}$ (den ***sowohl*** Griff ***als-auch*** Schneide Schlechten).

Folglich ist damit auch das 2. De Morgansche Gesetz verplausibilisiert. (Eine genauere Beweisführung folgt weiter unten).

$$2.\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

2. De Morgansche Regel ('türkisch'): Die Schnittmenge (sowohl-als-auch-Menge) derjenigen mit nur schlechten Eigenschaften ist das Gegenteil der Vereinigungsmenge der irgendwie Guten.

5. Anmerkung: Die De Morganschen Gesetze setzen übrigens voraus - und mit ihnen der Begriff Schnittmenge - , dass es sich ***nicht*** um ausschließende Eigenschaften handeln darf, sondern die Eigenschaften müssen zwar verschieden, aber dennoch ***kompatibel miteinander*** sein. Das Messer hat sowohl einen Griff als auch eine Schneide aus Stahl und nicht etwa Gummi als Schneide. (Sowas ‘Triviales’ sagt einem allerdings kein formalistisches Lehrbuch.)

Beispiel:

Die Lieblingsfarben bei Katzen sind für mich getigert und einfarbig-schwarz. Aber es kann keine Schnittmenge (= Sowohl-als-auch-Menge) von getigerten und schwarzen Katzen geben, die also definitiv beide Eigenschaften gleichzeitig haben: getigert ***und*** schwarz zu sein. Im Falle der Nicht-Kompatibilität muss ich unterschiedliche Obermengen Ω_i bilden, um weiterzukommen. Wenn ich also eine Zeitungsannonce aufgebe, in der ich Katzen suche, muss ich die Menge der Antworten von vornherein in zwei Obermengen aufteilen:

Ich bilde die Obermenge GET der getigerten Katzen und die Obermenge SCHW der schwarzen Katzen. Erst dann kann ich jeweils Untermengen bilden, die miteinander kompatibel sind: z.B. mit den Eigenschaften kann jagen (J), ist stubenrein (S), ist männlich (M), usw.

Nehmen wir mal an, ich habe mich von vornherein dafür entschieden: Die Katze, die ich haben will muss getigert (G) sein, soll stubenrein (S) sein und soll weiblich (W) sein, weil unsere frühere Lieblings-Katze auch so war. Das sind 3 kompatible Ansprüche, sodass für alle ‘guten’ Katzen der Angebote aus meiner Zeitungsannonce gilt: $G \cup S \cup W$ (alle drei guten Eigenschaften ‚addiert‘). Entsprechend wären die Katzen, die nicht in Frage kommen der Rest, für die also gilt: sie sind entweder ***nicht G*** oder ***nicht S*** oder ***nicht W*** oder erfüllen gar 2 oder sogar 3 von diesen Forderungen ***nicht***: $\overline{G} \cap \overline{S} \cap \overline{W}$ (= $\overline{G}$ ***und/oder*** $\overline{S}$ ***und/oder*** $\overline{W}$; bzw. ***sowohl*** nicht getigert, ***als auch*** nicht stubenrein, ***als auch*** nicht weiblich). Hier sieht man schon die Ausweitung des 2. De Morganschen Gesetzes, von 2 auf 3 Eigenschaften:

$$\overline{G \cup S \cup W} = \overline{G} \cap \overline{S} \cap \overline{W}$$

Es ist klar, dass man die Methode auf beliebig viele solcher kompatiblen Eigenschaften ausweiten kann (die Katze soll Trockenfutter gern essen, sie soll ein bestimmtes Gewicht nicht überschreiten, sie soll sterilisiert sein, einen Impfpass haben, sie soll noch jung sein, usw.). In der Realität würde das bedeuten, dass solch eine Katze innerhalb des Angebotpools meiner Zeitungsannonce zu finden um so unwahrscheinlicher wird, je weiter ich die Anzahl meiner Forderungen hochschraube.

Von dieser praktischen Überlegung her müsste sich die Vereinigungsmenge $G \cup S \cup W \cup ... \cup$ bei wachsender Zahl der Eigenschaften immer mehr der Nullmenge annähern, sofern der Auswahlpool begrenzt ist. (Gehört diese Frage nicht auch in das Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung?)

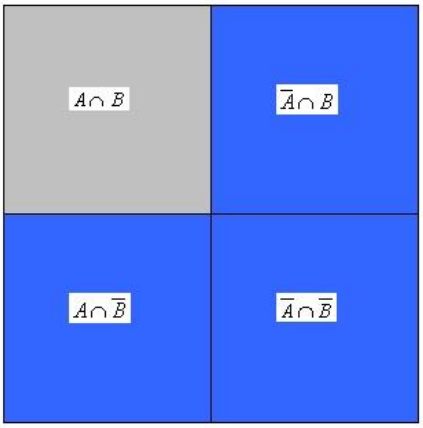
6. Anmerkung: Meine Verplausibilisierung der De Morganschen Gesetze lautete:

1. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. Das Gegenteil der Schnittmenge (=der sowohl-als-auch-Menge) derjenigen, die nur Gutes an sich haben, ist die Vereinigungsmenge der irgendwie Schlechten (=‚Addition‘ aller schlechten Eigenschaften). [‘Deutsche’ Variante]

2. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$. Das Gegenteil der Vereinigungsmenge der irgendwie Guten (=‘Addition‘ aller guten Eigenschaften), ist die Schnittmenge (=Sowohl-als-auch-Menge) derjenigen, die nur Schlechtes an sich haben. [‘Türkische’ Variante]

Ich möchte zum Schluss noch auf die interessante Beweisführung eingehen, die sich in der Wikipedia (ziemlich unten) unter dem Obertitel “**Beispiel in der Mengenlehre** ” findet. Es handelt sich allerdings um eine wortkarge und insofern für manchen unverständliche Tabellenkonfiguration. Ich werde versuchen, die Tabellenkonfiguration zu interpretieren:

Gegeben sei ein Schrank mit 4 Fächern (oder 4 Schubladen).



Die Behauptung bei Wikipedia ist offenbar, dass die drei blauen Schrankfächer - ***als Komplementärmenge zu*** $A\cap B$ (also $\overline{A\cap B}$) - zusammen gleich $\overline{A}\cup\overline{B}$ ergeben, da dies ja schlußendlich ***das 1. Gesetz*** ergeben soll: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. Nur ist erst mal unklar, wie das vonstatten gehen soll. Wie kommt es dazu, dass gilt:

$\overline{A}\cap B$? $A\cap\overline{B}$? $\overline{A}\cap\overline{B}$ $\rightarrow ?\,\overline{A}\cup\overline{B}$?

Erstens ist offenkundig, dass in die ***1. Schublade*** (die graue) alle guten Messer kommen $A\cap B$, wo sowohl Griff als auch Schneide gut sind. In die ***2. Schublade*** kommen alle Messer, wo einerseits die Schneide schlecht ist, aber der Griff gut: $\overline{A}\cap B$. In die ***3. Schublade*** kommen alle, wo einerseits die Schneide gut ist aber der Griff schlecht ist: $A\cap\overline{B}$. In die ***4. Schublade*** kommen alle, wo sowohl die Schneide schlecht ist als auch der Griff schlecht ist: $\overline{A}\cap\overline{B}$. ***Damit sind alle Denkmöglichkeiten erfasst***: In den 4 Schubladen finden sich sämtliche Messer sortiert und es gibt keinerlei Überschneidungen.

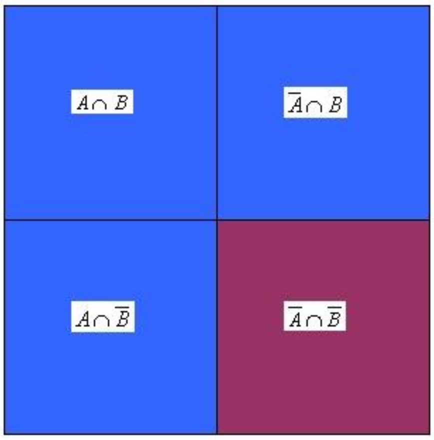
Zweitens ist einleuchtend: Die drei blauen Bereiche bilden zusammen die ***Komplementärmenge*** zu dem grauen Bereich: Es handelt sich ja bei den blauen Bereichen um alle diejenigen Schubladen, in denen Messer sind, die irgendwie schlecht sind - sei es an der Schneide oder am Griff oder an beidem. Während der graue Bereich aus den rein guten Messern besteht.

Drittens - die Lösung ist ziemlich einfach, wenn man statt nach einer Folgerungs-Beziehung (→) zu suchen, den gordischen Knoten durchhaut und anerkennt, dass es sich bei den 3 blauen Feldern um nix anderes handelt als um eine *exakte* ***Definition*** der Menge der ‘schlechten’ Messer: ***entweder*** sind es schlechte Schneiden (zusammen mit guten Griffen) $\overline{A}\cap B$ ***oder*** schlechte Griffe (zusammen mit guten Schneiden) $A\cap\overline{B}$ ***oder*** beides ist schlecht: Schneiden und Griffe $\overline{A}\cap\overline{B}$. Eine Formalisierung könnte dann so aussehen:

$\overline{A}\cap B$ Æ $A\cap\overline{B}$ Æ $\overline{A}\cap\overline{B}$ ***ist die Definition für***: $\overline{A}\cup\overline{B}$ (=alle schlechten Messer ‚zusammenaddiert‘), wobei das Zeichen **Æ** symbolisieren soll, dass es sich hier um die *ausschließende* Oder-Beziehung handelt, das ***Entweder-Oder***. Somit ergibt sich die Gleichheit ***durch Negation*** der *Komplementärmenge zu den drei üblen blauen Bereichen* $A\cap B$ (= das Gute). Die Negation lautet:

1. $\overline{A\cap B}$ (= das Gegenteil vom Guten) und dies ist gemäß der obigen Definition = $\overline{A}\cup\overline{B}$ (= alles Schlechte vereinigt), womit das 1. De Morgansche Gesetz bewiesen wäre.

Nun noch zum ***Beweis des 2. De Morganschen Gesetzes*** mit Hilfe jener Tabelle. Es ist zu beweisen 2. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$. In diesem zweiten Fall gehe ich von der rechten Seite der Gleichung aus (in der Tabelle jetzt als weinrotes Feld dargestellt: $\overline{A}\cap\overline{B}$ ***sowohl*** A ist schlecht ***als auch*** B). Die ***Komplementärmenge*** dazu sind die 3 blauen Felder. Ich will also von den 3 blauen Feldern (= alles irgendwie Positive) zu dem Ausdruck $A\cup B$ (= das vereinigte Positive) kommen, dessen Negation dann gleich ist dem weinroten Feld.



Wie man erkennt, sind die drei blauen Felder alle dadurch gekennzeichnet, dass sie entweder einen positiven oder sogar zwei positive Anteile besitzen, während das weinrote Feld den ***Rest an rein negativen Elementen*** enthält.

Man kann bei der Formalisierung wieder ganz analog zu oben verfahren: $A\cap\overline{B}$ **Æ** $\overline{A}\cap B$ **Æ** $A\cap B$ führt zur ***Definition*** von $A\cup B$ (= alles irgendwie Positive vereinigt). Dies ist also die Komplementärmenge von $\overline{A}\cap\overline{B}$ (= dem Rest an rein Negativem; das weinrote Feld). Somit ergibt sich die Gleichheit durch ***Negation der Komplementarität*** $A\cup B$:

$\overline{A\cup B}$ (= das Gegenteil von allem vereinigten Positiven) = $\overline{A}\cap\overline{B}$ (= das rein Negative im weinroten Feld). Kurz & Furz: 2. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, w.z.b.w.

Gibt es irgendwelche Anwendungen für die De Morganschen Gesetze?

So heißt es in der Wikipedia über De Morgan. Diese Gesetze besagen:

“...dass jede Konjunktion durch eine Disjunktion ausgedrückt werden kann und umgekehrt. Diese Gesetze wurden seither häufig bei mathematischen Beweisen und auch bei der Programmierung verwendet.”

Über “Anwendung” heißt es in der Wikipedia zu diesen Gesetzen:

“Die *De Morganschen Gesetze* haben wichtige Anwendungen in der diskreten Mathematik, der Elektrotechnik, der Physik und der Informatik. Die De Morganschen Gesetze werden häufig in der Entwicklung digitaler Schaltkreise genutzt, um die Typen verwendeter logischer Schaltelemente gegeneinander auszutauschen, oder Bauteile einzusparen.”

Das klingt alles sehr aufregend und interessant – aber konkret kann ich mir leider darunter nix vorstellen.